# Tentamen

# Elektriciteit en Magnetisme 1

# Woensdag 20 juni 2012

# 09:00-12:00

**Leg je collegekaart aan de rechterkant van de tafel.**

**Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.**
***Schrijf leesbaar*.**

**Maak elke opgave op een *apart* vel.**

**Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.**

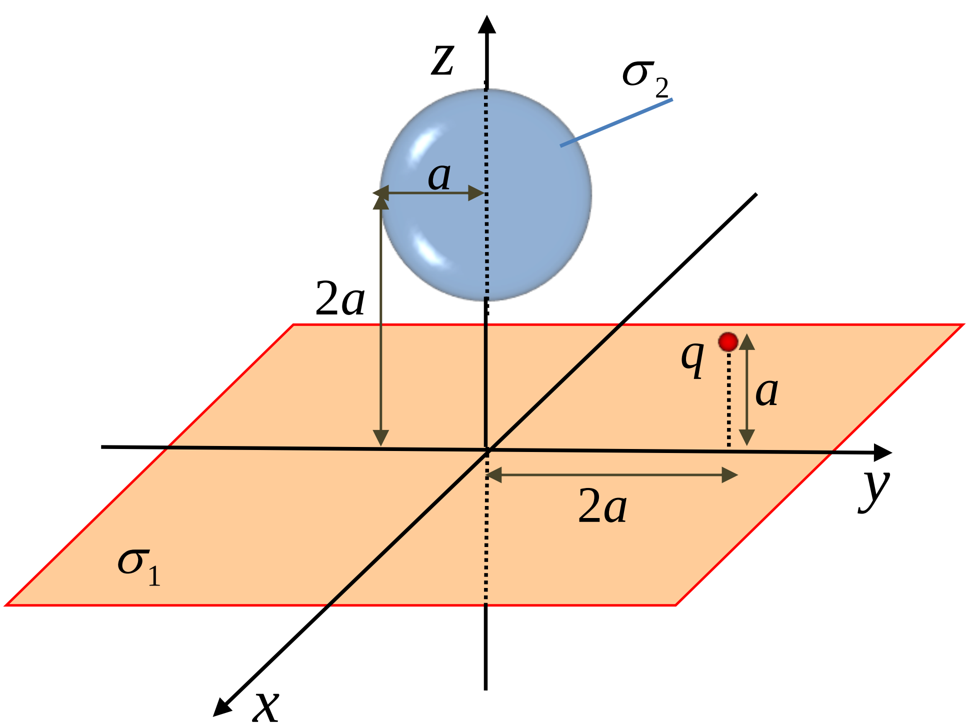
OPGAVE 1

*Punten: a+b+c+d+e =1+2+5+5+5=18*

In het $xy$-vlak ligt een oneindige, dunne plaat (zie figuur) met een homogene oppervlaktelading $\sigma_1$ (C m$^{-2}$). Boven deze plaat bevindt zich een bolschil met straal $a$ en met een homogene oppervlaktelading $\sigma_2$ (C m$^{-2}$). Het middelpunt van de bolschil valt samen met het punt $(x, y, z)=(0, 0, 2a)$. In het punt $(x, y, z)=(0, 2a, a)$ bevindt zich een puntlading $q$.

Druk, in je antwoord op onderstaande vragen, de richting van een veld of kracht uit in combinaties van de eenheidsvectoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, en $\hat{z}$.

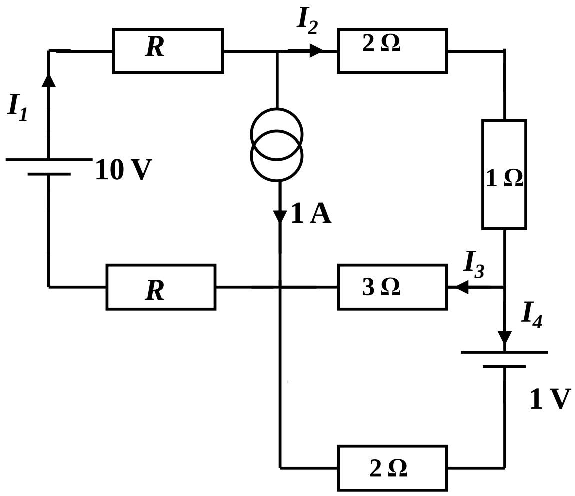
a) Geef de wet van Gauss in integrale vorm.
b) Leid hieruit de wet van Gauss in differentiële vorm af.
c) Bereken het elektrisch veld $\vec{E}$ ten gevolge van de lading op de bolschil op de positie van de puntlading, dus in het punt $(0, 2a, a)$.
d) Bereken het elektrisch veld $\vec{E}$ ten gevolge van de lading op de dunne plaat op de positie van de puntlading.
e) Bereken de totale kracht $\vec{F}$ op de puntlading $q$ ten gevolge van de lading op de bolschil en de dunne plaat.



OPGAVE 2

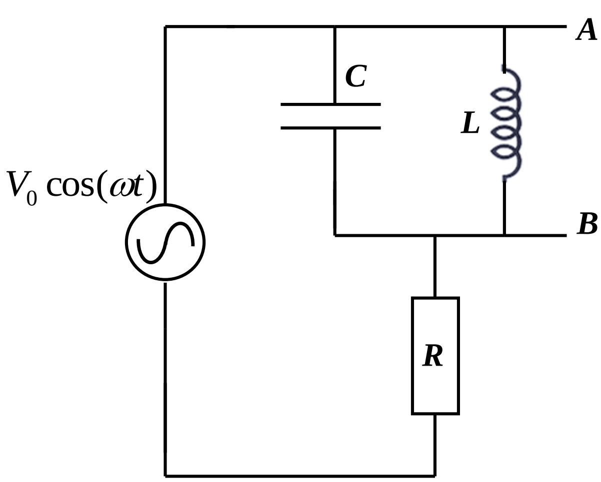
*Punten: a+b+c+d+e=4+3+4+4+3=18*

Gegeven is de getekende schakeling.




a) Geef alle vergelijkingen voor de knopen (Kirchhoff 1). Laat zien dat één van deze vergelijkingen uit de andere vergelijkingen afgeleid kan worden.
b) Geef alle vergelijkingen voor de mazen (Kirchhoff 2).
c) Gegeven is dat $I_1 = 3$ A. Bereken de waarde van de weerstand $R$.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling voor een stationaire wisselspanningsbron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $V = V_0 \cos(\omega t)$.




d) Geef de spanning $V_{AB} = V_B - V_A$ over de spoel $L$ in de complexe schrijfwijze.
e) Geef de spanning $V_{AB} = V_B - V_A$ over de spoel $L$ in de reële schrijfwijze.

OPGAVE 3
*Punten: a+b+c =6+6+6*

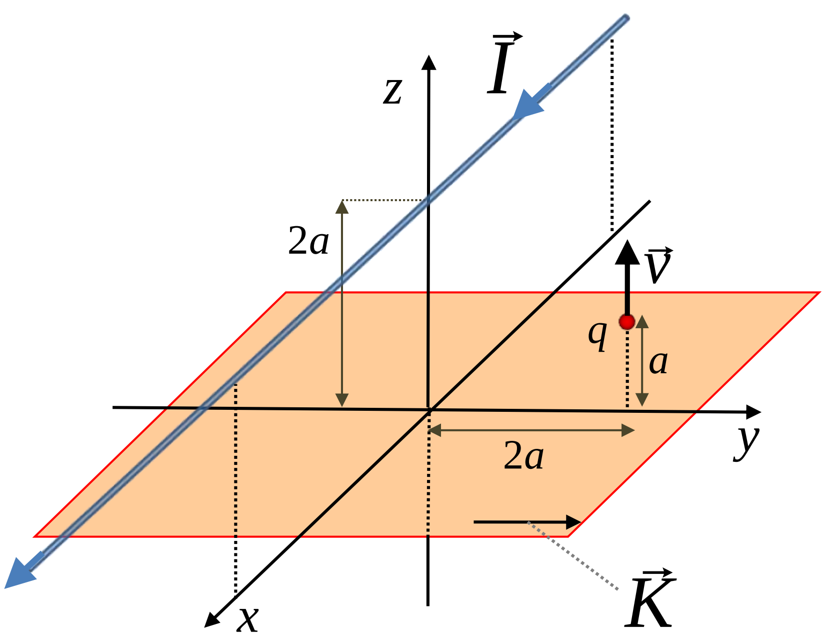
We beschouwen een situatie met een oneindige, dunne plaat in het *xy*-vlak (zie figuur) waarover een oppervlaktestroom $\vec{K} = K\hat{y}$ ($K$ in C s$^{-1}$ m$^{-1}$) loopt. Op een hoogte van 2$a$ boven de plaat ligt een stroomdraad parallel aan de $x$-as. Door deze draad gaat een stroom $\vec{I} = I\hat{x}$ ($I$ in C s$^{-1}$). In het punt ($x$, $y$, $z$)=(0, 2$a$, $a$) bevindt zich een puntlading $q$ die in de $z$-richting beweegt met snelheid $\vec{v} = v\hat{z}$.

Druk, in je antwoord op onderstaande vragen, de richting van een veld of kracht uit in combinaties van de eenheidsvectoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, en $\hat{z}$.

a) Bereken het magnetische veld $\vec{B}$ ten gevolge van de stroom door stroomdraad op de positie van de puntlading.
b) Bereken het magnetische veld $\vec{B}$ ten gevolge van de oppervlaktestroom over de dunne plaat op de positie van de puntlading.

Er is nu gegeven dat $K$ en $I$ zich verhouden als: $K = \frac{I}{2\pi a}$

c) Bereken de totale kracht $\vec{F}$ op de puntlading $q$ ten gevolge van de stroom door de stroomdraad en over de dunne plaat.

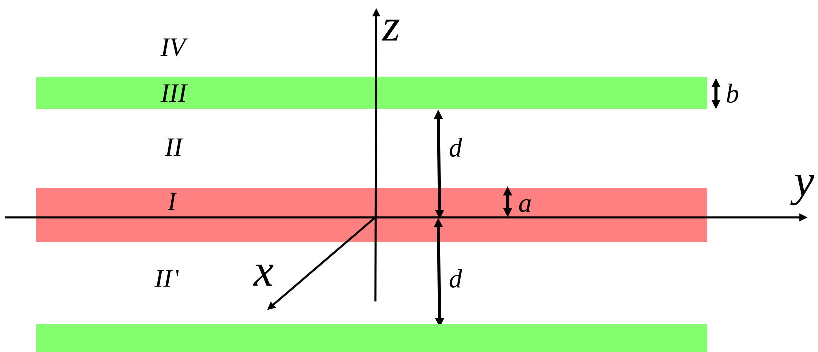


OPGAVE 4

*Punten: a+b+c+d+e+f=3+3+3+3+3+3=18*

Een grote vlakke plastic (niet geleidende) plaat met oppervlak $A$ en dikte $2a$ is zo georiënteerd dat het middenvlak van de plaat samenvalt met het *xy*-vlak. Boven en onder de plastic plaat bevinden zich twee dunne vlakke *geleidende* platen die parallel zijn met de plasticplaat en een afstand $d$ hebben tot het *xy*-vlak (zie figuur). Het oppervlak van de geleidende platen is ook $A$. Het oppervlak $A$ is zo groot dat randeffecten mogen worden verwaarloosd.

De plastic plaat heeft een ladingsverdeling: $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{d}}$ , waarbij $\rho_0$ (in C m$^{-3}$) een constante is.




a) Bewijs dat de totale lading $Q$ op de vlakke plastic plaat gelijk is aan:

$$Q = Ad\rho_0\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$$

We delen de ruimte boven het *xy*-vlak op in de volgende vier gebieden (zie figuur):
I: $z \leq a$; II: $a < z < d$; III: $d \leq z \leq d + b$; en IV: $z > d + b$.

b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ in de gebieden I, II, III en IV.

c) Bereken het potentiaalverschil $\Delta V$ tussen het punt (0, 0, 0) en het punt (0, 0, $d + \frac{b}{2}$ ).

De gebieden II en II’ worden nu opgevuld met een lineair diëlektricum met relatieve diëlektrische constante $\varepsilon_r$.

d) Bereken nu het elektrische veld $\vec{E}$ in de gebieden I, II, III en IV.

e) Toon aan dat de polarisatie $\vec{P}$ in het gebied II gegeven wordt door:

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}\hat{z}$$

Waarin $\gamma = d\rho_0\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$, de totale lading per oppervlakte (in C m$^{-2}$) van de vlakke plastic plaat is.

f) Bereken zowel de gebonden volumeladingsdichtheid als de gebonden oppervlakte-ladingsdichtheid van het diëlektricum in gebied II.

Uitwerkingen
Opgave 1

Onderdeel a)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Onderdeel b)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\tau = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Onderdeel c)
Het elektrische veld van de bolschil vinden we met de wet van Gauss. Neem een bolvormig Gauss-oppervlak concentrisch met de bolschil en met straal $r > a$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4\pi a^2 \sigma_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^2}$$

En dus

$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^2}\hat{r}$$

Op de positie van de puntlading geldt $r = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$ (afstand middelpunt bolschil tot de puntlading en ook $\hat{r} = \frac{2\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{5}}$.
Zodat,

$$\vec{E}(0, 2a, a) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{5}}{25}(2\hat{y} - \hat{z})$$

Onderdeel d)

Het elektrische veld van de dunne plaat vinden we met de wet van Gauss. Neem een Gauss-doosje met oppervlak $A$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2AE = \frac{A\sigma_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

En dus

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

Dit elektrisch veld is dus overal boven de plaat van dezelfde grootte en richting en dus ook op de positie van de puntlading.

Onderdeel e)

$$\vec{F} = q\vec{E}_{tot} = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(\sigma_2\frac{\sqrt{5}}{25}(2\hat{y} - \hat{z}) + \sigma_1\frac{1}{2}\hat{z}\right)$$

Opgave 2:

Onderdeel a)
Er zijn drie knooppunten.
Vergelijkingen van de knooppunten.

K1: $I_1 - I_2 - 1 = 0$
K2: $I_2 - I_3 - I_4 = 0$
K3: $I_3 + I_4 + 1 - I_1 = 0$

K3=-(K1+K2)

We kunnen de laatste vergelijking dus weglaten

Onderdeel b)
Belangrijk hier is dat de stroombron weggelaten kan worden voor het opstellen van de maasvergelijkingen. Er blijven dan twee mazen over en die geven (met de klok mee):

M1: $10 - RI_1 - 2I_2 - I_2 - 3I_3 - RI_1 = 0 \Rightarrow 10 - 2RI_1 - 3I_2 - 3I_3 = 0$
M2: $3I_3 - 1 - 2I_4 = 0$

Onderdeel c)

Gegeven is dat $I_1 = 3$ A; Invullen in K1: $3 - I_2 - 1 = 0 \Rightarrow I_2 = 2$ A.
Deze waarde invullen in K2: $2 - I_3 - I_4 = 0$ en deze combineren met M2 levert,
$I_3 = I_4 = 1$ A

Alle waarden voor de stromen invullen in M1 levert: $10 - 6R - 6 - 3 = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{6}\,\Omega$

Onderdeel d)
Definieer stromen $I$ (door de spanningsbron naar boven), $I_1$ (door de condensator naar beneden) en $I_2$ (door de spoel naar beneden).

Er wordt gevraagd: $V_{AB} = V_B - V_A = -Z_L I_2$

Kirchhoff 1 (er is 1 onafhankelijke knoop-vergelijking),

$I = I_1 + I_2$

Kirchhoff 2 (er zijn 2 mazen, met de klok mee),

$V_0 - Z_C I_1 - RI = 0$

$Z_C I_1 - Z_L I_2 = 0$

Uit de tweede maasvergelijking volgt:

$I_1 = \frac{Z_L I_2}{Z_C}$

En dit invullen in de eerste maasvergelijking samen met de knoopvergelijking geeft,

$V_0 - Z_C \frac{Z_L I_2}{Z_C} - R(I_1 + I_2) = 0 \Rightarrow V_0 - Z_L I_2 - R(\frac{Z_L I_2}{Z_C} + I_2) = 0$ en dus

$I_2 = \frac{V_0}{Z_L + R + \frac{RZ_L}{Z_C}}$

Zodat
$V_{AB} = -Z_L I_2 = \frac{-Z_L V_0}{Z_L + R + \frac{RZ_L}{Z_C}}$

Er geldt: $Z_L = i\omega L$ en $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$.

Dit invullen levert $V_{AB}$ in de complexe schrijfwijze,

$$V_{AB} = \frac{-i\omega L V_0}{i\omega L + R + \frac{Ri\omega L}{\frac{-i}{\omega C}}} = \frac{-i\omega L V_0}{i\omega L + R + \frac{Ri\omega L}{\frac{-i}{\omega C}}} = \frac{-i\omega L V_0}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}$$

Onderdeel e)
Voor de reële schrijfwijze vinden we,

$$|V_{AB}| = \left|\frac{-i\omega L V_0}{R(1-\omega^2 LC)+i\omega L}\right| = \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}}$$

en

$$\arg(V_{AB}) = \arg(-i\omega L V_0) - \arg(R(1-\omega^2 LC)+i\omega L) = \frac{3\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$

En dus de reële schrijfwijze wordt

$$V_{AB} = V_0 \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Met

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$

Opgave 3

Onderdeel a)

Het magnetische veld van de stroomdraad vinden we met de wet van Ampère. Neem een cirkelvormige Ampèrelus met straal $r$.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En dus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

Op de positie van de puntlading geldt: $r = \sqrt{a^2+(2a)^2} = \sqrt{5}a$ en $\hat{\varphi} = \frac{\hat{y}+2\hat{z}}{\sqrt{5}}$.

Invullen levert,

$$\vec{B}(0,2a,a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\frac{\hat{y}+2\hat{z}}{5}\right)$$

Onderdeel b)

Het magnetische veld van de dunne plaat vinden we met de wet van Ampère. Neem een rechthoekige Ampèrelus met lengte $l$ loodrecht op de stroomrichting.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow 2lB = \mu_0 KI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

En dus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x}$$

Dit magnetisch veld is dus overal boven de plaat van dezelfde grootte en richting en dus ook op de positie van de puntlading.

Onderdeel c)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}_{tot}) = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi a}\left(\hat{z} \times \left(\frac{\hat{x}}{2} + \frac{\hat{y}}{5} + \frac{2\hat{z}}{5}\right)\right) = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi a}\left(\frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{x}}{10}\right) = \frac{qv\mu_0 I}{4\pi a}\left(-\frac{\hat{x}}{5} + \hat{y}\right)$$

Opgave 4

Onderdeel a)

$$Q = \int_V \rho d\tau = A\int_{-a}^{a} \rho_0 e^{-\frac{z}{d}}\, dz = -Ad\rho_0\, e^{-\frac{z}{d}}\Big|_{-a}^{a} = Ad\rho_0\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$$

Onderdeel b) Pas de wet van Gauss toe, gebruik hiervoor een Gaussdoosje met oppervlak *S* dat symmetrisch tov het *xy*-vlak ligt (boven en ondervlak op afstand *z* van het *xy*-vlak) en dat geheel in de plastic plaat zit. Alle elektrische velden wijzen in de *z*-richting (vlakke plaat symmetrie). We beginnen deze procedure in het gebied II en (II') omdat in gebied I vanwege de ladingsverdeling de het veld niet symmetrisch is om het *xy*-vlak.

Gebied II (en II'):

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2S = \frac{S}{\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} \rho_0\, e^{-\frac{\acute{z}}{d}} d\acute{z} = \frac{S}{\varepsilon_0} d\rho_0\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) \Rightarrow E$$
$$= \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$$

En dus:

$$\vec{E} = \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)\hat{z}$$

Gebied I:
Gauss toepassen maar nu zitten ondervlak in gebied I op coördinaat *z* en bovenvlak van het Gaussdoosje in gebied II. Omsloten lading is nu gelijk aan die gevonden onder a) met $z{=}a$.

Dus

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{II}S - E_I(z)S = \frac{S}{\varepsilon_0}\int_z^a \rho_0\, e^{-\frac{\acute{z}}{d}} d\acute{z} = \frac{S}{\varepsilon_0} d\rho_0 \left(e^{\frac{-z}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) \Rightarrow E_I(z)$$

$$= E_{II} - \frac{d\rho_0}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{-z}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) = \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) - \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2e^{\frac{a}{d}} - 2e^{-\frac{z}{d}}\right)$$

$$= \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} + e^{-\frac{a}{d}} - 2e^{-\frac{z}{d}}\right)$$

Gebied III:
Dit is een geleider dus

$$\vec{E} = 0$$

Gebied IV: Omsloten lading gelijk aan die bij gebied II dus:

$$\vec{E} = \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)\hat{z}$$

Onderdeel c)
Merk op dat het tweede punt in de geleider ligt. Op een geleider is de potentiaal overal gelijk dus we kunnen volstaan met het potentiaalverschil tussen de oorsprong en het punt (0, 0, *d*). We volgen bij de berekening het kortste pad (dus recht naar boven).

$$\Delta V = V_{(0,0,0)} - V_{(0,0,d)} = \int_{(0,0,0)}^{(0,0,d)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^d E dz = \int_0^a E_I dz + \int_a^d E_{II} dz =$$

$$\int_0^a \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} + e^{-\frac{a}{d}} - 2e^{-\frac{z}{d}}\right) dz + \int_a^d \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) dz$$

$$= \frac{da\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} + e^{-\frac{a}{d}}\right) + \frac{d^2\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2e^{-\frac{a}{d}} - 2\right) + \frac{d^2\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$$
$$- \frac{da\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) =$$

$$\frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2ae^{-\frac{a}{d}} + d\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) - 2d\right)$$

Onderdeel d)

In gebied I, III en IV verandert er niets. In gebied II gebruiken we de wet van Gauss voor het $\vec{D}$-veld.

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q_{enc} \Rightarrow D2S = Sd\rho_0\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right) \Rightarrow D = \frac{d\rho_0}{2}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)$$

En met: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ vinden we,

$$\vec{E} = \frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)\hat{z}$$

Onderdeel e)

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{d\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)\hat{z} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{d\rho_0}{2}\left(e^{\frac{a}{d}} - e^{-\frac{a}{d}}\right)\hat{z}$$
$$= \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}\hat{z}$$

Onderdeel f)

Gebonden volumeladingsdichtheid:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}\right] = 0$$

Gebonden oppervlaktelading: er zijn twee oppervlakken, namelijk bij $z = a$ en bij $z = d$.

$$\sigma_b(z = a) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}\hat{z} \cdot -\hat{z} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}$$
$$\sigma_b(z = d) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}\hat{z} \cdot \hat{z} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{\gamma}{2}$$